

Dynamické kritické jevy

každý obor začíná nejprve statickými jevy a pak dynamickými jevy protože prvé jsou lépe definované

□ statické vs. dynamické

Ve **statické situaci** je kritické chování určeno:

- i. dimenzí parametru uspořádání
- ii. dimenzí fyzikálního prostoru

V **dynamické situaci** vstupuje navíc závislost na čase a objevují se další kritické exponenty.

Dynamické kritické jevy

různé situace

❖ blízko rovnováhy

- relaxační jevy , $T \rightarrow T_c$ $t_{\text{relax}} \rightarrow \infty$
- např. fázové uspořádání

❖ daleko od rovnováhy

- např. vývoj rozhraní

V obou případech existuje kritické chování.

Určující elementem je
existence a typ symetrie problému.

Fázové uspořádání

vývoj domén při ochlazení z vysoké teploty pod kritickou teplotu

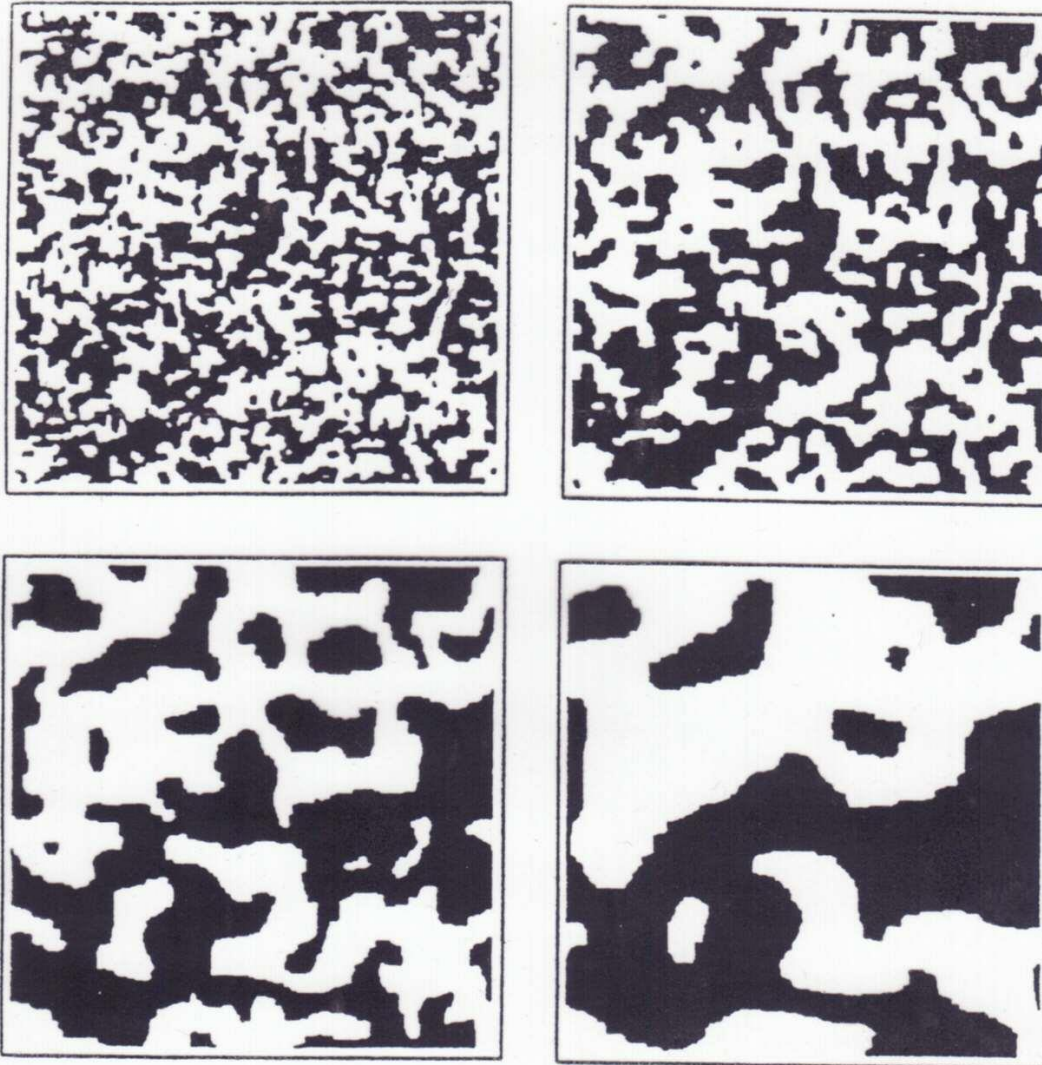


Figure 2. Monte Carlo simulation of domain growth in the $d = 2$ Ising model at $T = 0$ (taken from Kissner [8]). The system size is 256×256 , and the snapshots correspond to 5, 15, 60 and 200 Monte Carlo steps per spin after a quench from $T = \infty$.

Fázové uspořádání

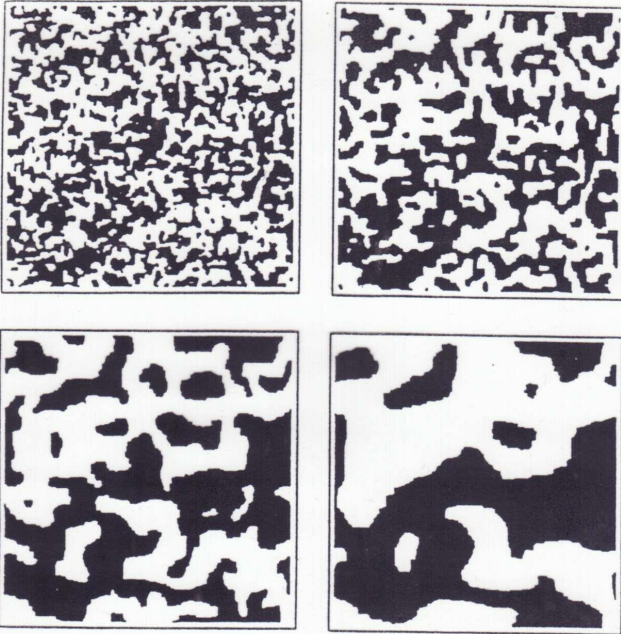


Figure 2. Monte Carlo simulation of domain growth in the $d = 2$ Ising model at $T = 0$ (taken from Kissner [8]). The system size is 256×256 , and the snapshots correspond to 5, 15, 60 and 200 Monte Carlo steps per spin after a quench from $T = \infty$.

příklady:

- separace fází v binární slitině
- tvorba kapaliny z podchlazeném plynu
- relaxace magnetizace při změně teploty nebo vnějšího pole

mechanizmy a stádia:

- nukleace
- spinodální dekompozice
- růst domén

tři kategorie modelů a metod:

- kinetické Isingovy modely
- stochastické časově závislé Ginzburg-Landauovy modely
- dynamika klastrů

Fázové uspořádání

vývoj domén při ochlazení pod kritickou teplotu

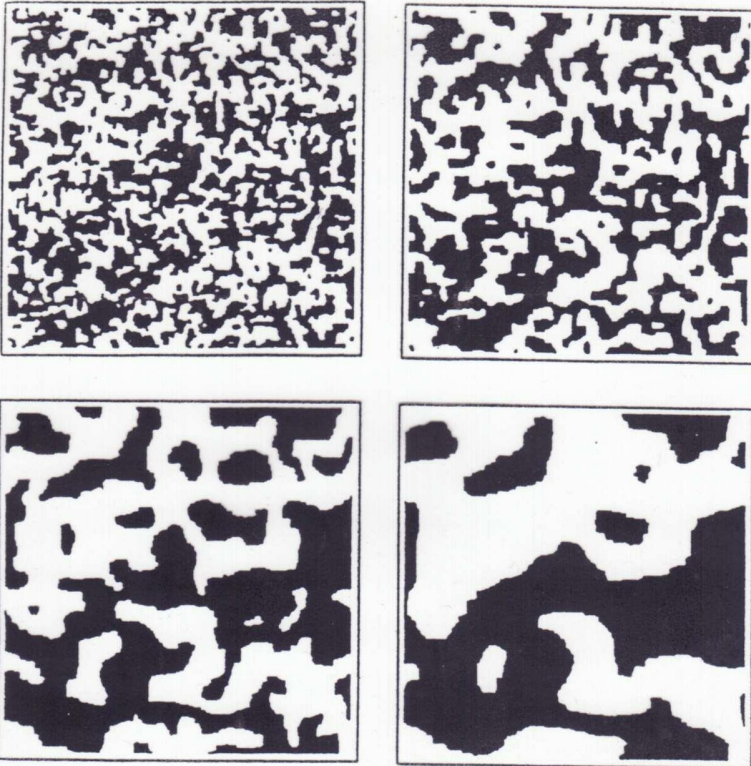


Figure 2. Monte Carlo simulation of domain growth in the $d = 2$ Ising model at $T = 0$ (taken from Kissner [8]). The system size is 256×256 , and the snapshots correspond to 5, 15, 60 and 200 Monte Carlo steps per spin after a quench from $T = \infty$.

Soutředíme se na
závislost velikosti
domény L na čase

$$L(t) = ?$$

korelační funkce spin-spin

$$\sigma_i(t) \cdot \sigma_j(t),$$

závislost velikosti domény L na čase ?

- Výpočet velikosti domény pomocí nul korelační funkce.
- Následně určovat časovou závislost

Kinetický Isingův model

$$\sigma_i(t), i=1, \dots, N$$

závislost velikosti domény L na čase ?

různé situace pro celkovou magnetizaci M

- a) NEzachovává se
- b) zachovává se

dynamika

- a) Glauber
- b) Kawasaki

různá závislost velikosti domény L na čase:

- a) $L \sim t^{1/2}$
- b) $L \sim t^{1/3}$

jména zákonitostí

- a) Cahn – Allen
- b) Lifšic – Slyozov - Wagner

Samorganizace

Pojem samorganizace je užíván v různých kontextech v: informační teorii, termodynamice, matematice, kybernetice atd.

Patří sem mnoho jevů např:

- krystalizace;

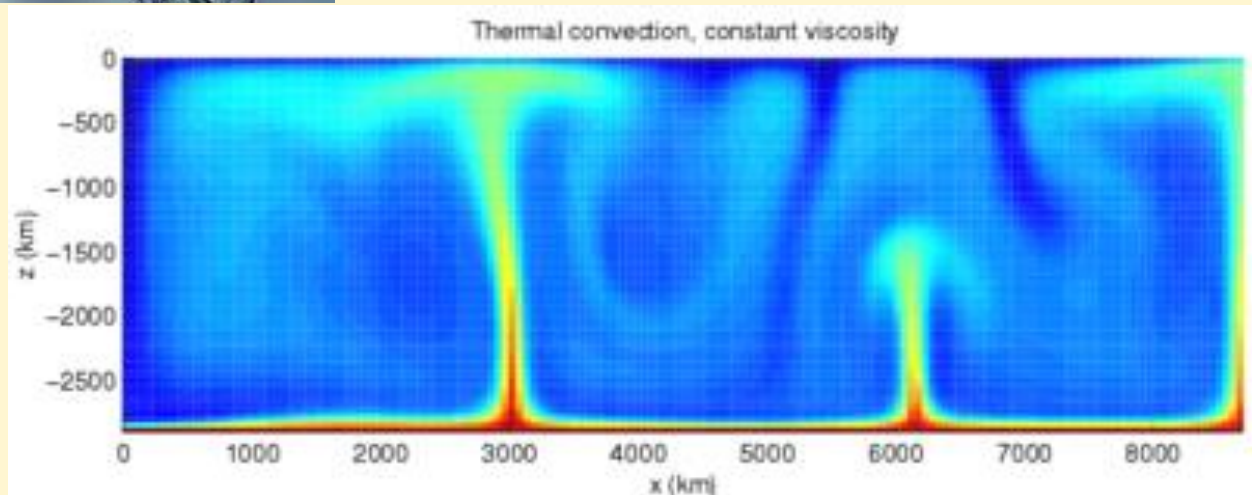


- vznik hejn ptáků;



- konvekční proudění v kapalině;

- etc.



Samorganizace

Neexistuje však obecně přijímaná definice.

Možnost: **Samorganizace je proces při němž vzniká spontánně globální pořádek nebo koordinace v systému jen s lokálními interakcemi.**

Termodynamické hledisko: 2. termodynamická věta.

Izolovaný systém se vyvíjí do stavu s maximální entropií, tj. max. neuspořádaností \Rightarrow rovnovážné **izolované systémy nevedou k samouspořádávání.**

Reálné samouspořádávající se systémy (rostliny, krystaly, společenství etc.) jsou **otevřené a disipativní.**

Je nutné studovat **dynamiku** otevřených systému !

Celulární automaty (CA)

- alternativní popis samoorganizace
- diskrétní souřadnice i diskrétní proměnné + diskrétní čas
- CA mají netriviální dynamické chování
- jednodušší než modely samoorganizace s diferenciálními rovnicemi
- CA jsou jednodušší, proto umožňují detailnější analýzu
- přesto velká rozmanitost komplikovaných jevů

Historické pozn.:

- ⌚ **1963 von Neumann a Ulam zavedli jako idealizaci biologických systémů („cellular spaces“) s cílem modelování samoprodukce**
- ⌚ **postupně zaváděny v dalších oblastech pod různými jmény**
- ⌚ **1983 Wolfram – [Rev. Mod. Phys. 55, 601 \(1983\)](#)**
- ⌚ ...

Celulární automaty (CA)

Formalizace:

CA určen zadáním možných stavů a dynamických pravidel

Stav:

pravidelné uspořádání **konečného počtu buněk**,
každá buňka může být v některém z **konečného počtu stavů**

- pole buněk indexované indexem i , obvykle mříž Λ v d dimenzích
- stav buňky je popsán hodnotou **diskrétní** proměnné s_i z konečné množiny stavů \mathbf{S}

Pravidlo:

- lokální pravidlo evoluce v **diskrétním čase** $t \rightarrow t + 1$
 - pro každé i definuj určité okolí $O(i)$ – množina buněk v okolí buňky i

pro každé $i \in \Lambda$ nová hodnota $\mathbf{s}_i(t+1) = F(\{\mathbf{s}\}_{O(i)}(t))$

například:

$$s_i(t+1) = s_{i-1}(t).XOR.s_{i+1}(t)$$

Celulární automaty - typy

Různé typy:

- deterministické nebo stochastické podle charakteru pravidla
- synchronní (paralelní)
- asynchronní – sekvenční (tj. po řadě)
 - s náhodným výběrem
- podle množiny stavů **S**
 - binární, speciálně **S** = {0, 1}
 - q stavů

Celulární automaty - aplikace

Používají se různých oblastech:

- ❖ **dopravní problémy**
- ❖ **vývoj rozhraní**
- ❖ **hydrodynamika** – hrubý popis proudění tekutin, tj. řešení Navierových-Stokesových rovnic
- ❖ **modelování biologické evoluce**
- ❖ **studium imunologie**
- ❖ **transport částic** – řešení Boltzmannovy rovnice
- ❖ **studium samoorganizovaných kritických jevů**
- ❖ **etc. etc.**

Celulární automaty - počet

Počet automatů velmi rychle roste s dimenzí !

- např. necht' $O(i)$ jsou **jen nejbližší sousedé** a samotná buňka i se nepočítá, pak počet sousedů je $K = 2d$
- uvažujme binární automat, pak počet konfigurací v okolí buňky je
$$N_C = 2^K \quad (\text{pro } q \text{ stavů } N_C = q^K), \quad C \text{ je množina konfigurací}$$
- pravidlo: zobrazení množiny C stavů do množiny hodnot S
- počet pravidel je:

$$N_P = 2^{N_C} = 2^{2^K}$$

d	1	2	3	...
N_C	$2^2 = 4$	$2^4 = 16$	$2^8 = 64$	
N_P	$2^4 = 16$	$2^{16} = 65536$	$2^{64} > 10^{19}$	

Je-li zahrnut počáteční uzel, pak $K = 2d + 1$ a počet automatů roste s dimenzí ještě rychleji.

CA může záviset i
na původní buňce.

$$d = 1, K = 3 \text{ (} i-1, i, i+1 \text{)}$$

$$N_C = 2^3 = 8$$

$$N_P = 2^8 = 256$$

Pro analýzu lze využít
symetrie, pak je *jen*
32 různých pravidel.

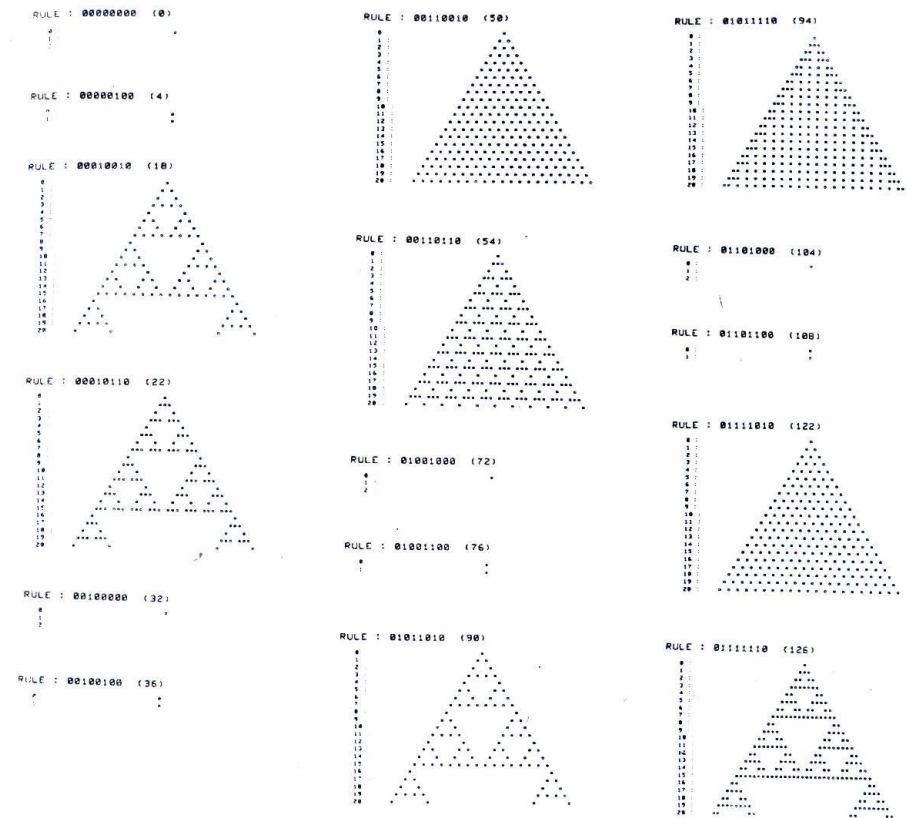


FIG. 3. Evolution of one-dimensional elementary cellular automata according to the 32 possible legal sets of rules, starting from a state containing a single site with value 1. Sites with value 1 are represented by stars, and those with value 0 by blanks. The configurations of the cellular automata at successive time steps are shown on successive lines. The time evolution is shown up to the point where the system is detected to cycle (visiting a particular configuration for the second time), or for at most 20 time steps. The process is analogous to the growth of a crystal from a microscope seed. A considerable variety of behavior is evident. The cellular automata which do not tend to a uniform state yield asymptotically self-similar fractal configurations.

is nontrivial. In the infinite time limit, the configurations are "self-similar" in that views of the configuration with different "magnifications" (but with the same "resolution") are indistinguishable. The configurations thus exhibit the same structure on all scales.

Consider as an example the modulo-two rule 90 (also used as the example for Fig. 1 and in the discussion above). This rule takes each site to be the sum modulo-

two, as illustrated in Fig. 4 (cf. Wolfram, 1982b). The values of the sites are hence the values of binomial coefficients [or equivalently, coefficients of x^j in the expansion of $(1+x)^n$] modulo two. In the large time limit, the pattern of sites with value 1 may be obtained by the recursive geometrical construction (cf. Sierpinski, 1916; Abelson and diSessa, 1981, Sec. 2.4) shown in Fig. 5. This --

Celulární automaty - klasifikace

V roce 1983 prozkoumal všechny automaty pro 1D a K=3 Wolfram, [Rev. Mod. Phys. 55, 601 \(1983\)](#).

v případě q stavů

$$N_P = q^K$$

Obecně je nepraktické vyčíslovat všechny CA, užitečná je klasifikace podle:

- a) typu vývoje
- b) stability k poruše
- c) aplikace

Modelování evoluce

koevoluce mnoha živých organizmů stejné složitosti

Hra života – game of life, http://cs.wikipedia.org/wiki/Hra_%C5%BEivota
dvoustavový, dvourozměrný CA cca 1970, (britský matematik John Conway) vznikl před Wolframovým článkem!



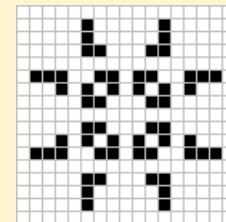
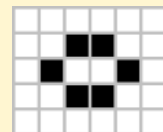
Buňky jsou obsazené nebo neobsazené organizmem, tj jsou živé nebo mrtvé.
CA s $K = 8$, tj. 8 sousedů na čtvercové mřížce

Pravidla:

1. Každá **živá** buňka s méně než dvěma živými sousedy **zemře**.
2. Každá **živá** buňka se dvěma nebo třemi živými sousedy **zůstává žít**.
3. Každá **živá** buňka s více než třemi živými sousedy **zemře**.
4. Každá **mrtvá** buňka s právě třemi živými sousedy **oživne**.

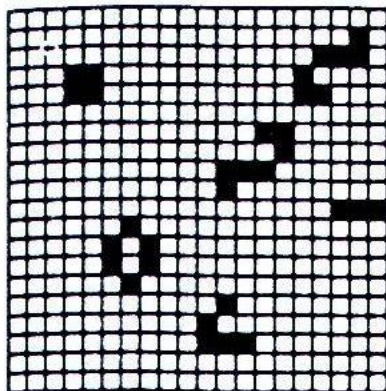
Konfigurace se skládají z:

- stabilních elementů
- periodických vzorů
- pohybujících a měnících se struktur

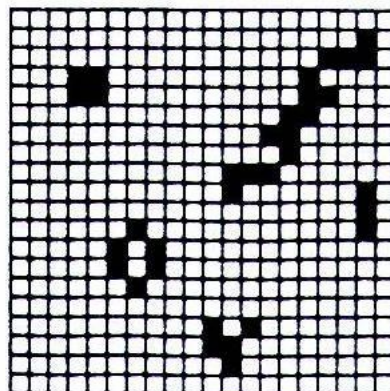


<http://www.bitstorm.org/gameoflife/>

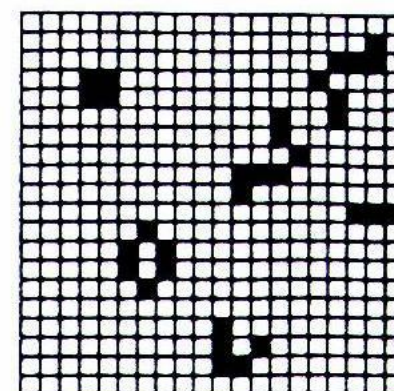
Hra života – vývoj konfigurací



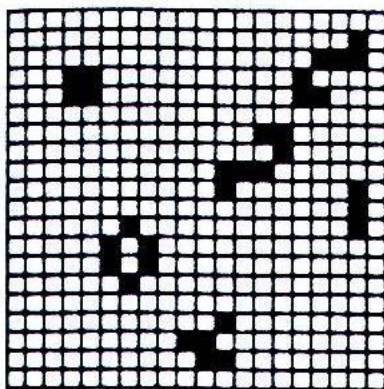
(a)



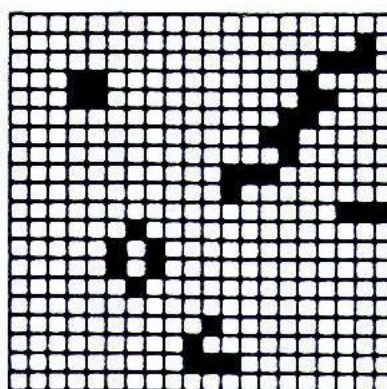
(b)



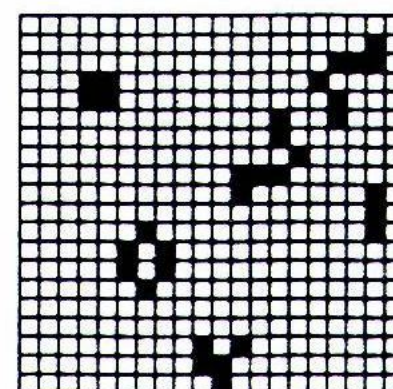
(c)



(d)



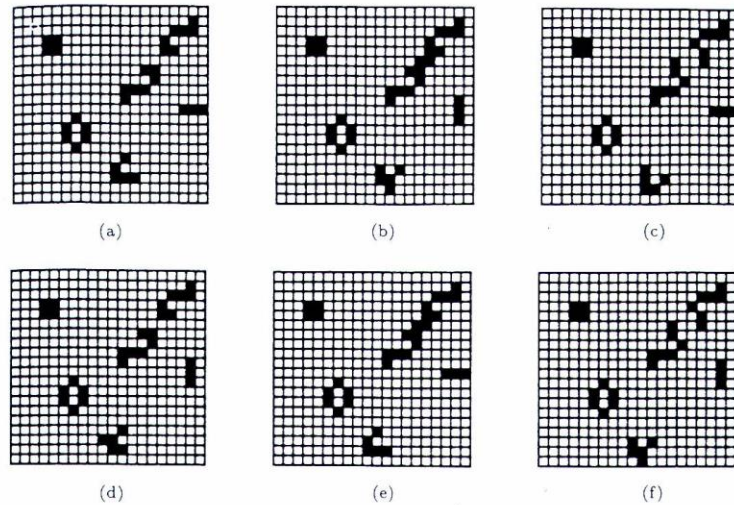
(e)



(f)

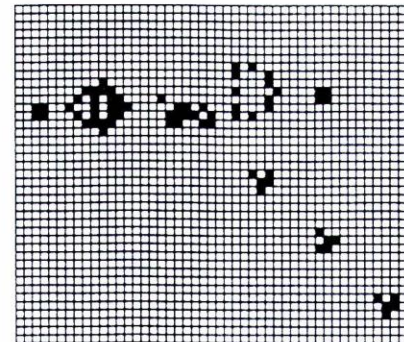
Six "Game of Life" steps of the evolution of a 20×20 configuration.

Hra života



Six "Game of Life" steps of the evolution of a 20×20 configuration.

vznik nových klastrů
pomocí „děla“



A so-called "gun" which periodically generates gliders with the "Game of Life" cellular automaton.

wikipedia: **game of life**
http://en.wikipedia.org/wiki/Conway%27s_Game_of_Life#External_links
<http://www.bitstorm.org/gameoflife/>

Vlastnosti hry života

Vývoj na vzorku $L \times L$ vždy dosáhne stacionárního stavu s cca 3 % živých buněk - atraktor.
Proces je samoorganizující se. Potřebný čas $t_{\text{rel}} \sim L^{1/2}$.

Provedme poruchu stavu:
jednu mrtvou buňku změňme na živou buňku.
Následně se dosáhne obecně jiný stacionární stav.
Změna se může lavinovitě šířit přes celou konfiguraci.
Měříme velikost S laviny změn.

$$n(S) = S^{-\tau}, \quad \tau \approx 1,3$$

Existence mocninné závislosti implikuje,
že není žádná typická velikost laviny!

3d varianta na youtube

<http://www.youtube.com/watch?v=xg0PKAvL01Y>

Samoorganizovaná kritikalita

self-organized criticality (SOC)

http://en.wikipedia.org/wiki/Self-organized_criticality

BTW (*Per Bak, Chao Tang and Kurt Wiesenfeld*) model 1987

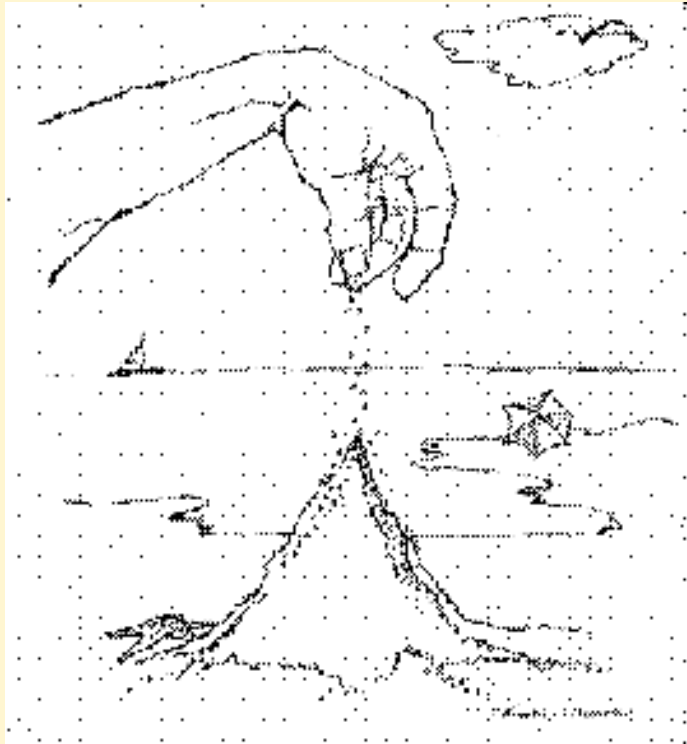
P. Bak, C. Tang a K. Wiesenfeld, *Physical Review Letters* **59** (4): 381–384, (1987).

Samoorganizovaný kritický systém je disipativní systém spontánně se vyvíjející do stacionárního stavu s korelacemi na všech škálách.

Příklady:

- hromádky sypaného písku
- stékající kapky na skle
- sněhové laviny
- pohyb zemských desek-zemětřesení
- vznik zácp v dopravě
- evoluce
- etc.

Pískové kupy



BTW model *(Per Bak, Chao Tang and Kurt Wiesenfeld)*

stav: soubor nezáporných celých čísel na 2 D mřížce $z(x, y) \leq 0$

pravidla: na náhodně vybraný uzel se uloží částice.

$$z(x, y) \text{ se zvětší na } z(x, y) + 1$$

libovolný uzel s $z(x, y) \geq 4$ je nestabilní

při dosažení nestability nastane redistribuce:

$$z(x, y) \rightarrow z(x, y) - 4$$

$$z(x \pm 1, y) \rightarrow z(x \pm 1, y) + 1$$

$$z(x, y \pm 1) \rightarrow z(x, y \pm 1) + 1$$

Vznik nestabilit se může řetězit.

Vznikají laviny změn

1	2	0	2	3
2	3	2	3	0
1	2	3	3	2
3	1	3	2	1
0	2	2	1	2

1	2	0	2	3
2	3	2	3	0
1	2	4	3	2
3	1	3	2	1
0	2	2	1	2

1	2	0	2	3
2	3	3	3	0
1	3	0	4	2
3	1	4	2	1
0	2	2	1	2

1	2	0	2	3
2	3	3	4	0
1	3	2	0	3
3	2	0	4	1
0	2	3	1	2

1	2	0	3	3
2	3	4	0	1
1	3	2	2	3
3	2	1	0	2
0	2	3	2	2

1	2	1	3	3
2	4	0	1	1
1	3	3	2	3
3	2	1	0	2
0	2	3	2	2

1	3	1	3	3
3	0	1	1	1
1	4	3	2	3
3	2	1	0	2
0	2	3	2	2

1	3	1	3	3
3	1	1	1	1
2	0	4	2	3
3	3	1	0	2
0	2	3	2	2

1	3	1	3	3
3	1	2	1	1
2	1	0	3	3
3	3	2	0	2
0	2	3	2	2

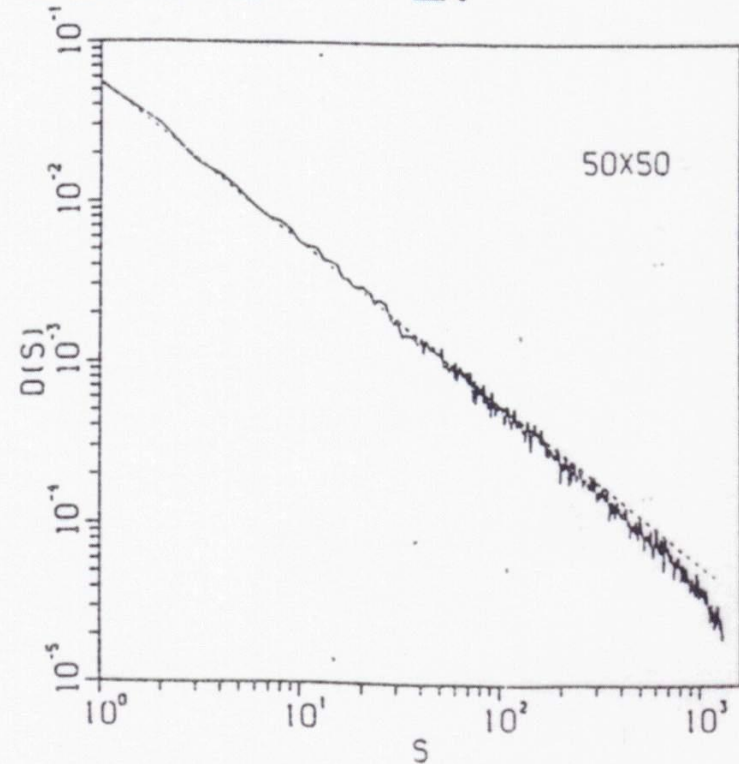
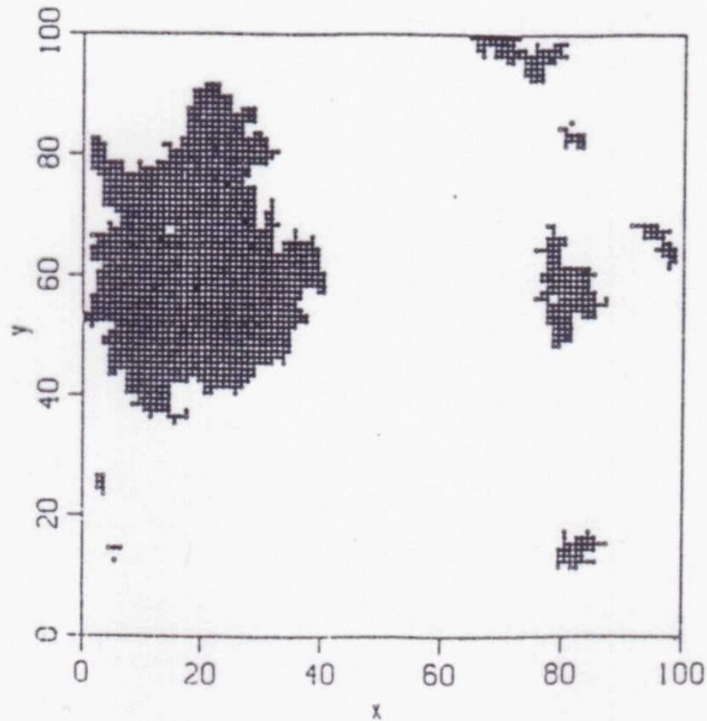
1	3	1	3	3
3				1
2				3
3	3			2
0	2	3	2	2



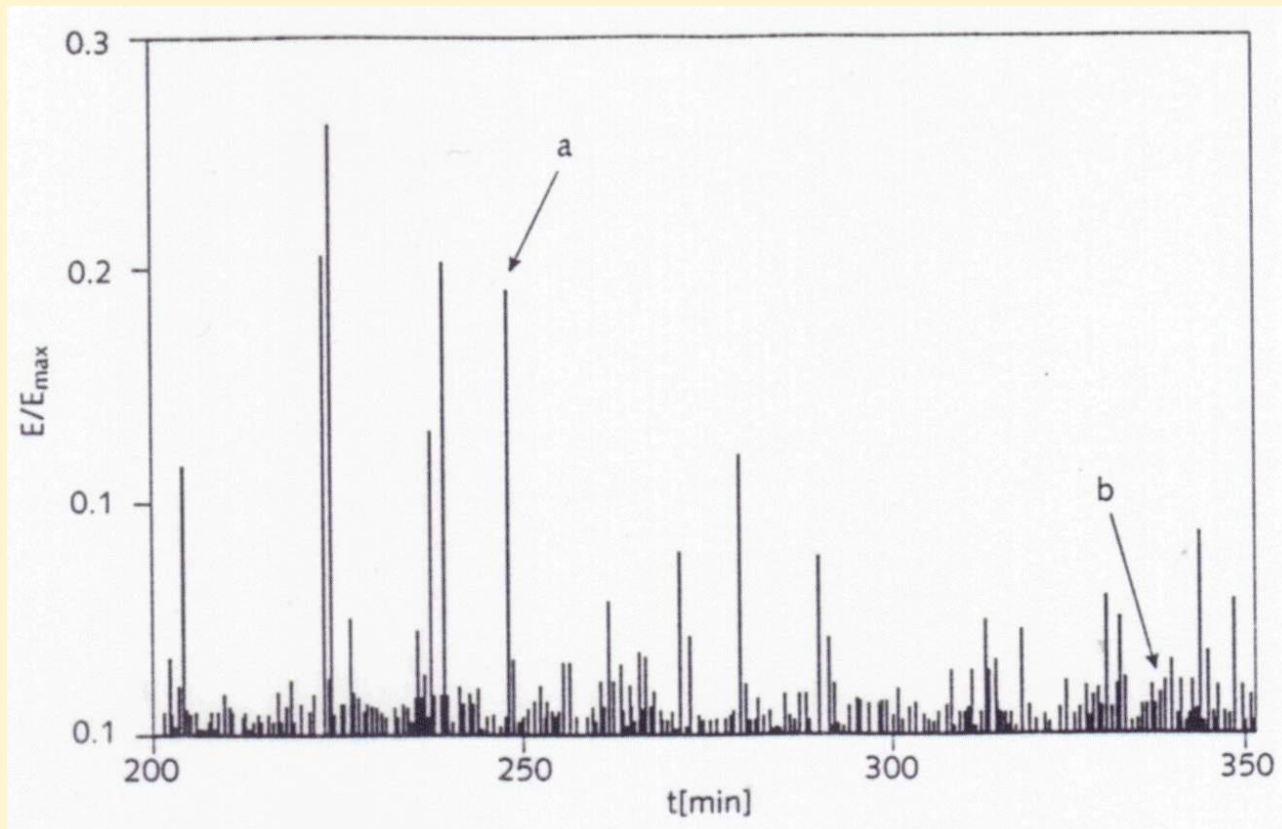
Velikost laviny S se měří jako počet zasažených uzlů po přidání jedné částice.

Rozdělení velikostí lavin:

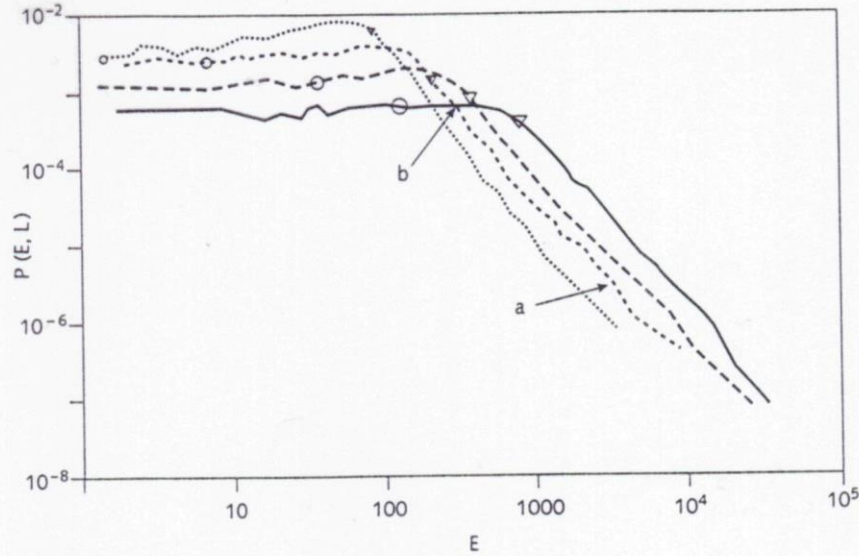
$$P(s) \propto s^{-\tau}, \quad \tau = 1.22 \text{ in } D = 2.$$



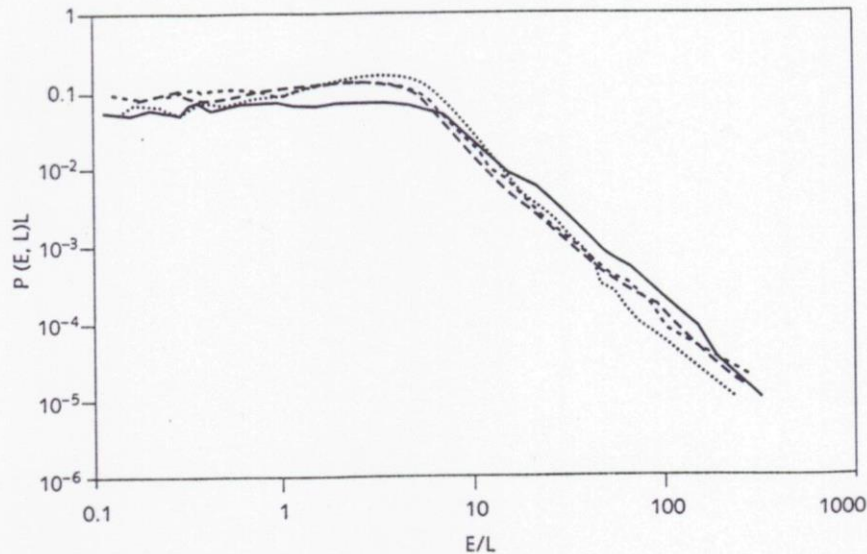
Experimentální měření lavin skutečného materiálu



Rozdělení lavin pro rýžové kupy



(a)



(b)

Křivky pro různé realizace



Přeškálované
křivky ukazují,
že jev je univerzální.