Laplaceovský růst, nestabilita >> fraktální objekty

Mnoho příkladů na internetu http://en.wikipedia.org/wiki/Fractal

přírodní objekty

DLA klaster vzniklý elektrodepozicí sulfátu mědi

výpočet fraktální dimenze – box counting

http://www.fast.u-psud.fr/~moisy/ml/boxcount/html/demo.html

http://en.wikipedia.org/wiki/Diffusion-limited_aggregation

Fraktály

typy:

- **matematické (abstraktní) fraktály**
- **přírodní objekty**
- **výsledky měření/výpočtů**

mnoho příkladů:

- **Cantorova množina, Kochova křivka, …**
- **mapy (profily pobřeží, síť říčních přítoků, hvězdná obloha, krátery na planetách, …)**
- **výsledky měření/výpočtů**

další příklady a informace např. na wikipedii:

http://en.wikipedia.org/wiki/Fractal#Introduction

např.
H. von Koch - jeden z prvních matematických fraktálů 1904,
B. Mandelbrot - pojem fraktálu – 1975, …

Fraktály

typy:

- **matematické (abstraktní) fraktály**
- **přírodní objekty**
- **výsledky měření/výpočtů**

mnoho příkladů:

- **Cantorova množina, Kochova křivka, …**
- **mapy (profily pobřeží, síť říčních přítoků, hvězdná obloha, krátery na planetách, …)**
- **výsledky měření/výpočtů**

vlastnosti:

1. samopodobnost (self-similarity)
2. fraktální dimenze

PROČ A JAK V PŘÍRODĚ VZNIKAJÍ?

první krok statický popis tj. **Geometrie**

Euklidovská geometrie:

- **tradiční > 2000 let**
- **založená na určité velikosti**
- **vhodná pro makroskopické lidské výtvory**
- **popsaná vzorci**

fraktální geometrie:

- **nová cca 40 let**
- **žádná specifická škála**
- **vhodná pro přírodní objekty**
- **objekty jsou určeny algoritmy**

Škálová invariance

$$M\left(bL\right)=g\left(b\right)M\left(L\right)$$

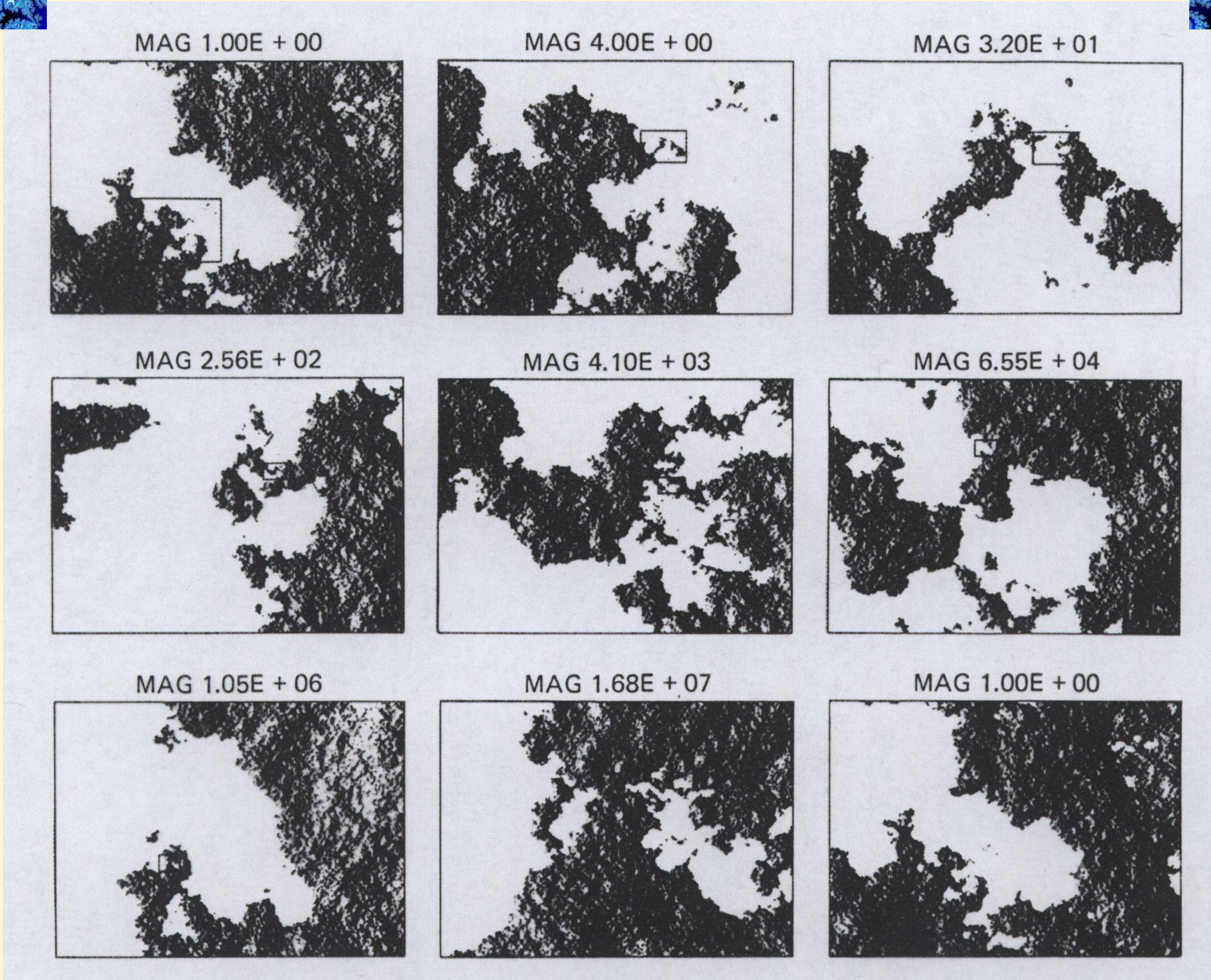
Po n iteracích po sobě $L\rightarrow b^{n}L$

$$M\left(b^{n}L\right)=\left[g\left(b\right)\right]^{n}M\left(L\right)=g\left(b^{n}\right)M\left(L\right)$$

$$\left[g\left(b\right)\right]^{n}=g\left(b^{n}\right)$$

řeší $$\left[g\left(b\right)\right]=b^{\alpha}$$

Příklad samopodobnosti - krajina



pojem dimenze

objekt rozděl na *N* stejně velkých částí o velikosti *r*

- úsečka $r = 1/N$
- čtverec $r = \frac{1}{\sqrt{N}}$
- krychle $r = \frac{1}{\sqrt[3]{N}}$
- hyperkrychle $N = 1/r^D$

$$D = \frac{\log N(r)}{\log {}^{1}/_{r}}$$

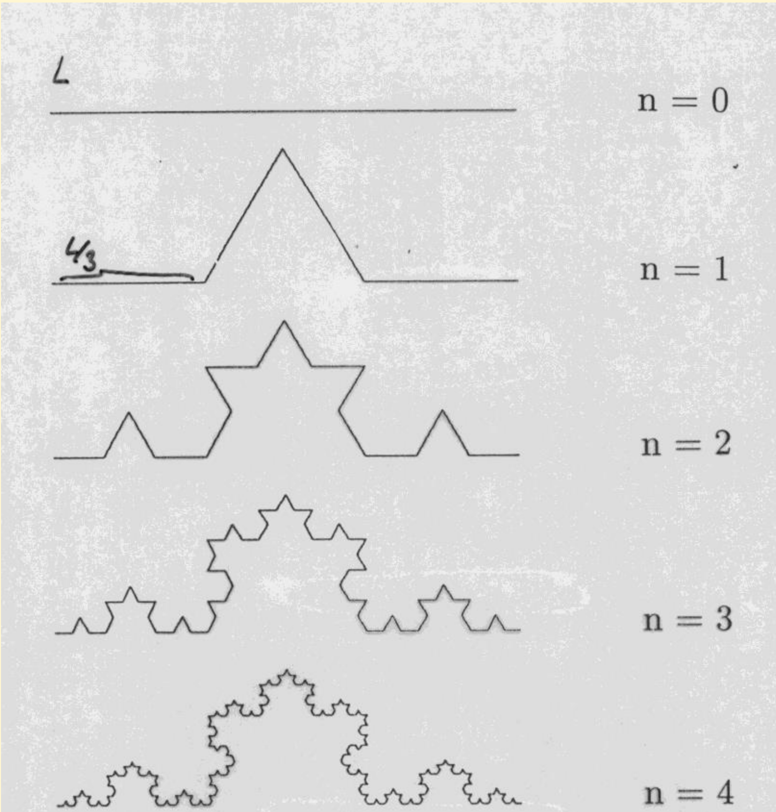
fraktální dimenze:

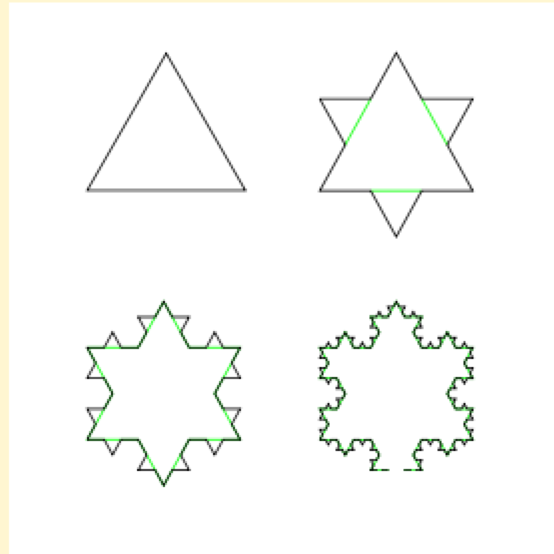
přeškálování délky $L \rightarrow b\,L$ **pak „hmoty“** $M(bL) = b^D M(L)$

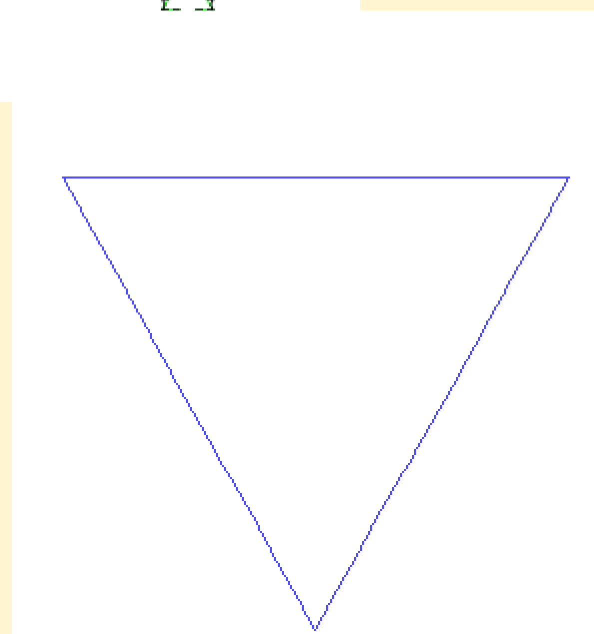
$$\boxed{D_f = \frac{\log \frac{M(L)}{M(bL)}}{\log {}^{1}/_{b}}}$$

Kochova křivka - rok 1904

http://en.wikipedia.org/wiki/Helge_von_Koch

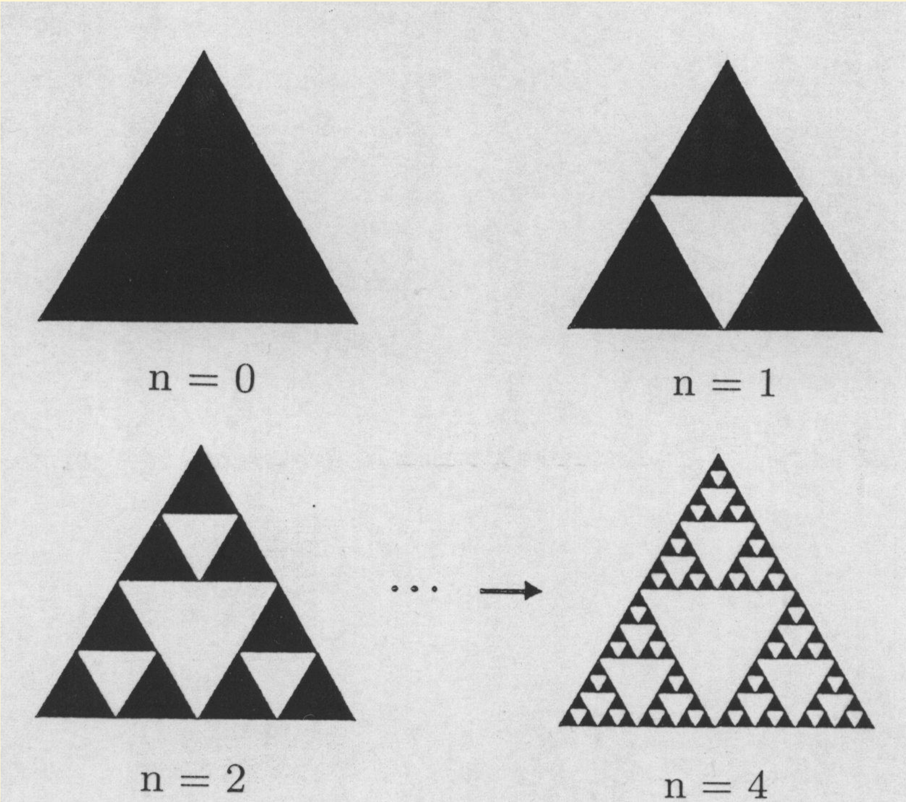






$$D_f = \frac{\log 4}{\log 3}$$

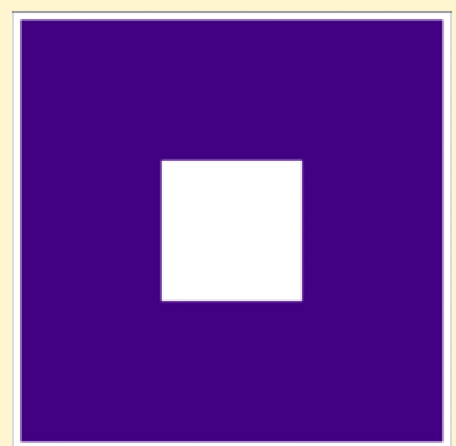
V rovině …

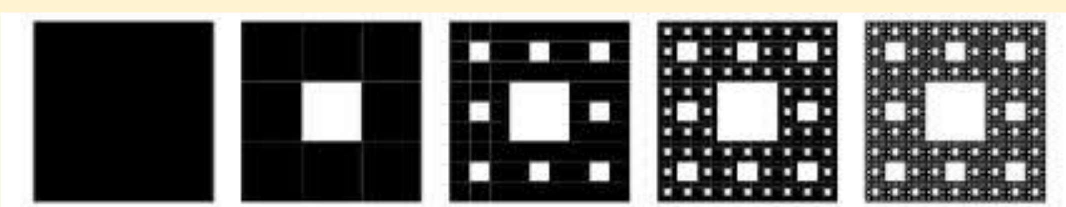


Sierpinski gasket

$$D = \frac{\log 3}{\log 2}$$

Sierpinski carpet





Výbojem vytvořený fraktál

High-voltage dielectric breakdown within a block of plexiglas creates a fractal pattern called a Lichtenberg figure. The branching discharges ultimately become hairlike, but are thought to extend down to the molecular level.

http://capturedlightning.com/frames/lichtenbergs.html

Literatura

- B.B. Mandelbroad, The fractal geometry of nature, W.H. Freeman and comp., New York 1983.
- M. Plischke a B. Bergensen, Equilibrium statistical Physics, World Scientific, Singapore, 1994(2. vydání)
- K. Huang, Statistical Mechanics, John Wiley & Sons, Singapore, 1987 (2. vydání)
- A. -L Barabasi a H. E. Stanley, Fractal Concepts is Surface Growth, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- A. C. Levi and M. Kotrla, Theory and simulations of crystal growth, J. Phys. Cond. Matt. 9, 299-344 (1997).
- N. G. Van Kampen, Stochastic Processes in Physics and Chemistry, North-Holland, Amsterdam, 1981.

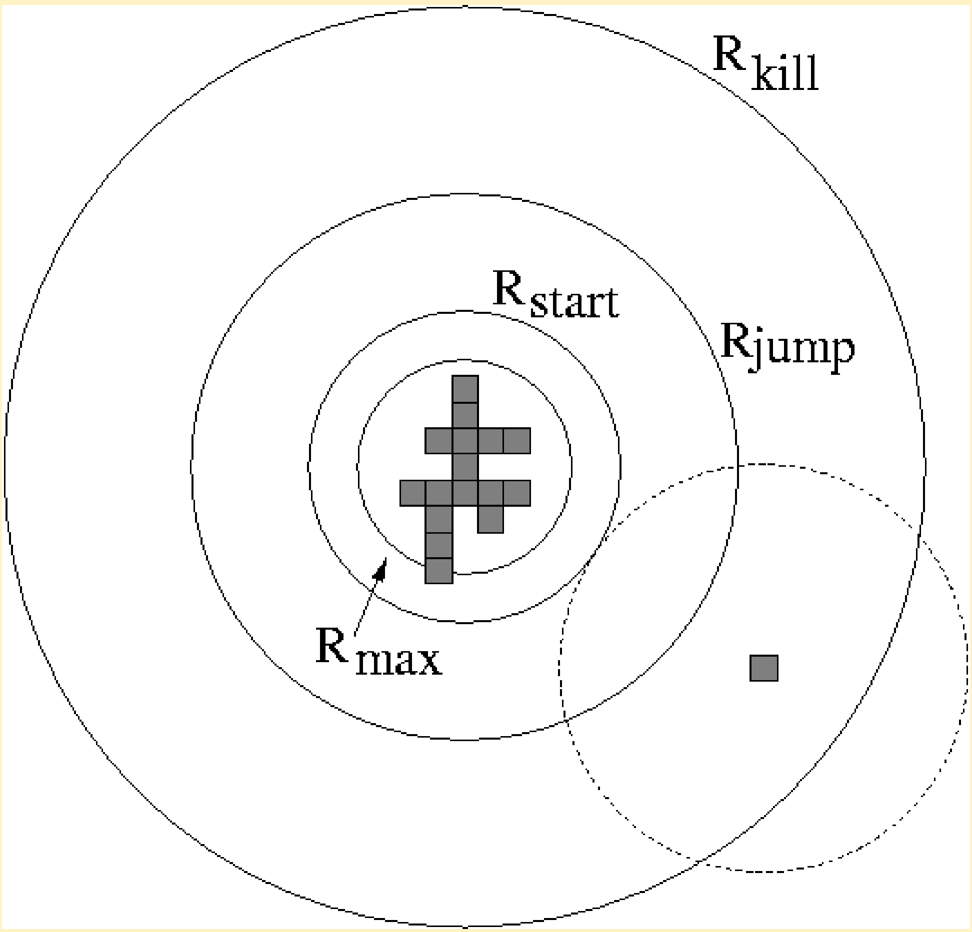
Fraktální dimenze vytvořeného klastru

-Uvažujte hexagonální mřížku v rovině. Vrcholy buď jsou nebo nejsou obsazeny molekulou.
-Na začátku simulace je jen jedna molekula uprostřed mřížky.
-Jeden krok simulace popisuje difúzi molekuly z velké vzdálenosti až do okamžiku, kdy se usadí na povrchu vnikajícího klastu. Připojení je nevratné.

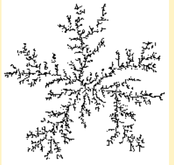
-Molekula se objeví na náhodně vybraném vrcholu na obvodu mřížky. Potom molekula náhodně difunduje -- přeskakuje na libovolný sousedící vrchol do té doby, kdy dosáhne vrcholu, který sousedí s nějakým již obsazeným vrcholem.
-Tento krok se pak opakuje, až se vytvoří dostatečně veliký klastr. Určete fraktální dimenzi vytvořeného klastru.

Algoritmus pro DLA)

(difúzí omezená agregace)



Witten and Sander (1981)



Basic algorithm: DLA on a square lattice

1. **Initialize**

start with an immobile seed particle in the center of an otherwise empty square lattice (cluster mass M = 1, cluster radius Rmax = 1)

2. **Launch a new particle**

place a single particle with equal probability on a circle with radius Rstart > Rmax about the center (as small as possible, e.g. Rstart = Rmax + 1)

3. **Diffusion**

move the particle from its current position to a randomly chosen nearest neighbor (NN) site. Repeat 3 until a NN site of a cluster particle is reached, then go to step 4

4. **Aggregation**

add the particle to the cluster, increase M by one and re-evaluate Rmax. stop if the desired mass M is reached, else go to step 2.

Diffusion Limited Aggregation (DLA)

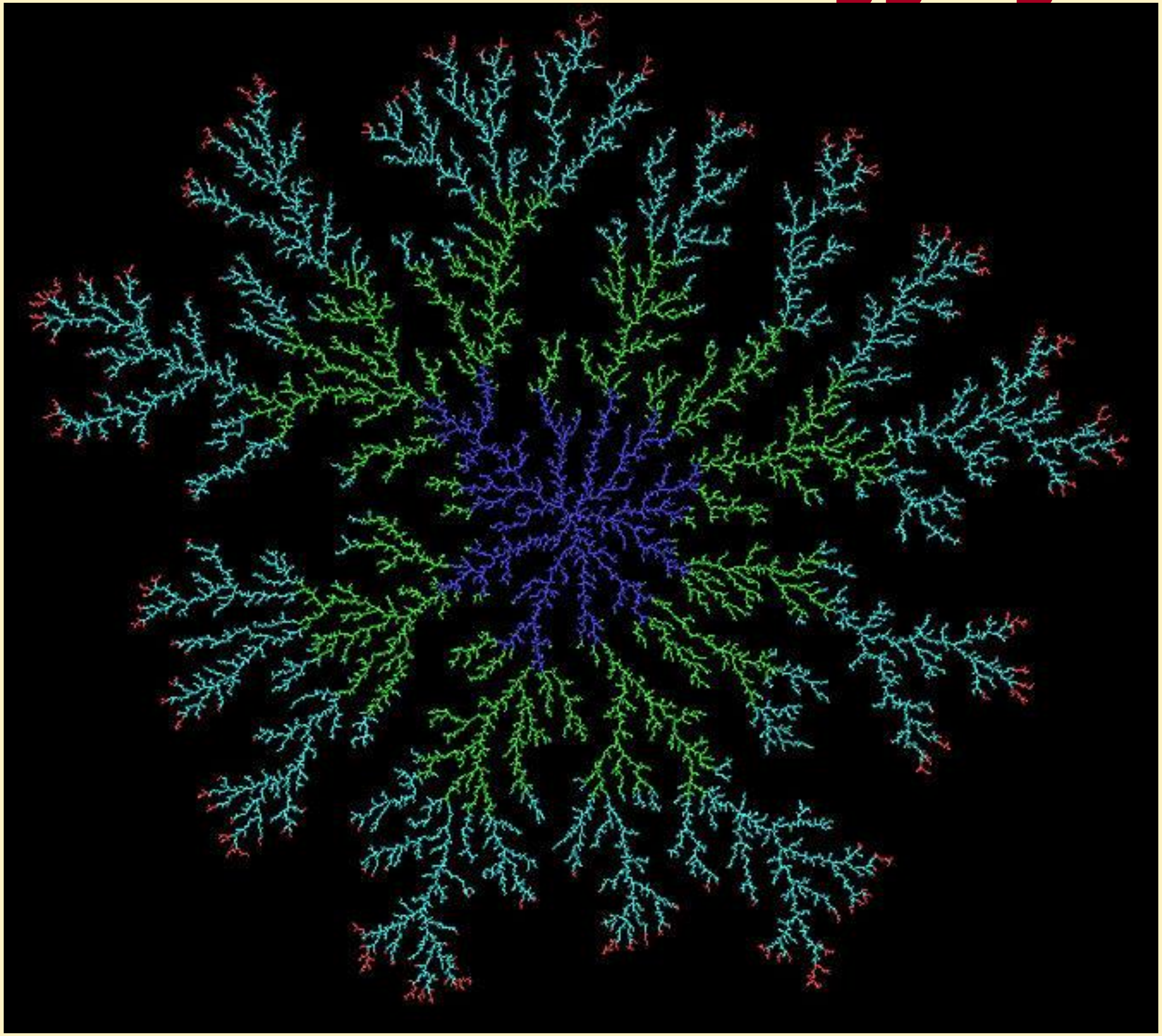
3. **Diffusion (shortcuts)**
calculate the current distance r of the particle from the origin.

If r < Rjump : move the particle from its current position to a randomly chosen nearest neighbor site.

If Rkill>rRjump : move the particle with equal probability anywhere on a circle with radius (r − Rstart) around its current position.

If r Rkill : remove the particle from the lattice, go to step 2. repeat 3 until a nearest neighbor of a cluster site is reached, then go to 4.

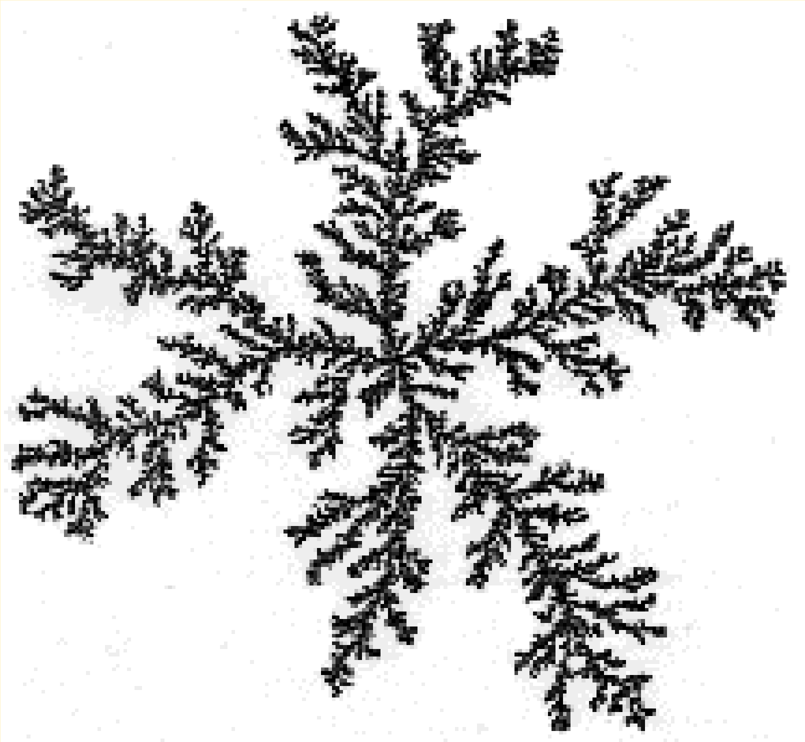
Diffusion Limited Aggregation (DLA)

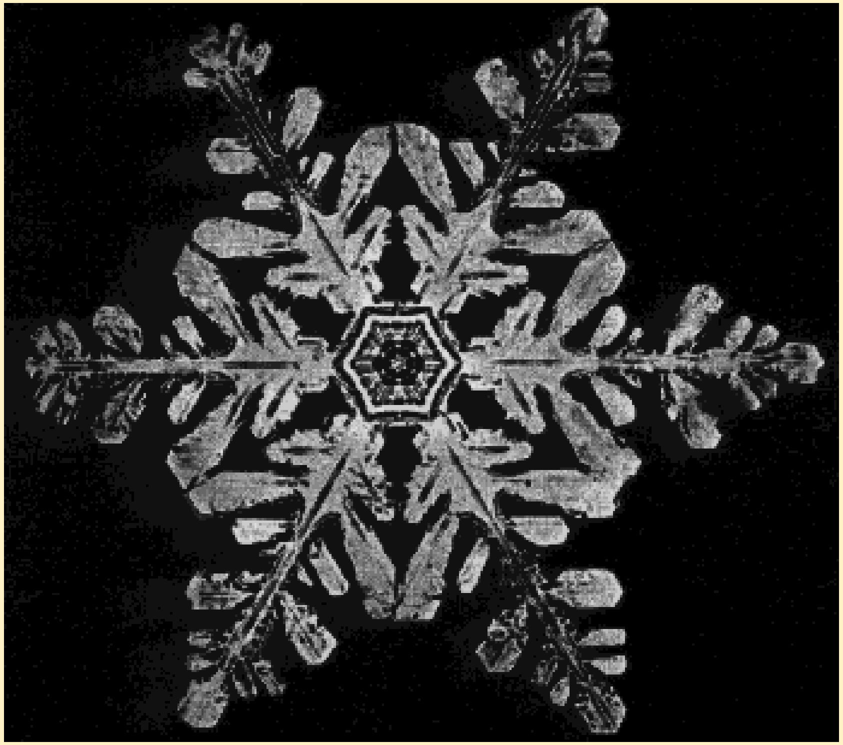


A DLA consisting about 33,000 particles obtained by allowing random walkers to adhere to a seed at the center. Different colors indicate different arrival time of the random walkers.

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Of7_p0001_15h.jpg

Diffusion limited aggregation





http://en.wikipedia.org/wiki/Diffusion-limited_aggregation

http://classes.yale.edu/fractals/panorama/physics/dla/DLA.html

Úloha - Fraktální dimenze

DLA1 - Fraktální dimenze vytvořeného klastru
– zjednodušená verze difuzí řízené agregace

Uvažujte čtvercovou mřížku v rovině. Vrcholy buď jsou, nebo nejsou obsazeny molekulou. Na začátku simulace je jen jedna molekula uprostřed mřížky. Jeden krok simulace popisuje difúzi molekuly z velké vzdálenosti až do okamžiku, kdy se usadí na povrchu vnikajícího klastru. Připojení je nevratné. Molekula se objeví na náhodně vybraném vrcholu na obvodu mřížky Potom molekula náhodně difunduje - přeskakuje na libovolný souse vrchol do té doby, kdy dosáhne vrcholu, který sousedí s nějakým již obsazeným vrcholem. Tento krok se pak opakuje, až se vytvoří dostatečně veliký klastr. Použijte „urychlovací triky“ a **určete fraktální dimenzi** vytvořeného klastru.